数理解析研究所講究録
566巻 1985年 89-94

Graphのbond latticeについて

東海大理学部　土屋守正（Morimasa Tsuchiya）

［5］で、グラフGより構成されるBond Lattice $\mathcal{L}(G)$が定義されている。ここでは、$\mathcal{L}(G)$がいくつかの束論的性質をみたすために、グラフGの満たすべき性質について述べる。なお、ここでは単純グラフのみを扱う。

グラフGの辺集合E(G)の部分集合Aに対して、

$\bar{A}=\{e\in E(G)\mid e$ の両端点は$\langle A\rangle$の1つの連結成分に属す$\}$

$\langle A\rangle$: Aで生成される辺部分グラフ

で$\bar{A}$を定義し、$\bar{A}$をAのclosureといい、$\bar{A}=A$のときAはclosedであるという。$\mathcal{L}(G)$でE(G)の部分集合でclosedであるもの全体を表わす。$\mathcal{L}(G)$における二つの演算∨，∧を

$$x\vee y=\overline{(x\cup y)},\quad x\wedge y=x\cap y$$

で定めると、$\mathcal{L}(G)$は演算∨，∧の下で束になり、この束をBond Latticeという。これまでに得られている結果としては、次のようなものがある。

定理1．次の3つの命題は同値である。

(1) $\mathcal{L}(G)$が，ブール束

(2) $\mathcal{L}(G)$が，分配束

(3) Gが，forest

定理2．$\mathcal{L}(G)$がモジュラー束であるための必要十分条件は，Gが長さ4以上のcycleを含まないことである。

これらの結果は，モジュラー束や分配束に対する部分束による特徴付けに基づいて証明したものである。次に$\mathcal{L}(G)$の要素についての束論的性質について考えたところ　モジュラー対に対して次の結果がえられ，これらの結果の系として，定理1，2が得られた。

さて，束$\mathcal{L}$の2要素A，Bに対して（A，B）がモジュラー対であるのは，

$$C \leqq B \Rightarrow C \vee (A \wedge B) = (C \vee A) \wedge B$$

が成立するとき，かつこのときに限る．

定義1．A，B $\in \mathcal{L}(G)$，K $\subseteqq$ E(G)に対して，Kが（A，B）に関するM−cycleである。

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\langle K \rangle$は$\langle A \vee B \rangle$に含まれる長さ4以上のcycleで、次の(1)～(3)の条件を満たすものである。

但し、$K(A) := K \cap A$, $K(B) := K \cap B$

(1) $K(A) \neq K$, $K(B) \neq K$

(2) $K(A) \cup K(B) = K$

(3) $\exists e \in K(B)$ s.t. $e \notin \overline{(K(B) \setminus \{e\})} \vee (A \wedge B)$

<u>定理3.</u> A, B ∈ $\mathcal{L}(G)$に対して、(A, B)がモジュラー対であるための必要十分条件は、(A, B)に関するM-cycleが存在しないことである。

束$\mathcal{L}$がモジュラー束であるのは、$\mathcal{L}$のすべての2要素がモジュラー対であるとき、かつこのときに限るので、定理3より定理2が系として得られる。

また、分配3組について同様のことを考えてみた。束$\mathcal{L}$の3要素A, B, Cについて

$$(A, B, C)D \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が定義されており、これに対して次の結果が得られた。

<u>定義2.</u> A, B, C ∈ $\mathcal{L}(G)$, $K \subseteq E(G)$に対して、Kが(A, B, C)に関するD-cycle

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\langle K\rangle$は$\langle A\vee B\rangle$に含まれるcycleで、次の(1)、(2)の条件を満たすものである。

但し、$K(A):=K\cap A$, $K(B):=K\cap B$, $K(C):=K\cap C$

(1) $K(A)\neq K$, $K(B)\neq K$, $K(C)\neq K$

(2) $\exists e\in K(C)$ s.t. $K(A)\cup K(B)=K\setminus\{e\}$

and $e\notin(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$

<u>定理4.</u> $A, B, C\in\mathcal{L}(G)$に対して、$(A, B, C)Đ$であるための必要十分条件は、(A, B, C)に関するĐ-cycleが存在しないことである。

束$\mathcal{L}$が分配束であるのは、$\mathcal{L}$の任意の3要素A, B, Cに対して、$(A, B, C)Đ$であるとき、かつこのときに限るので、定理4より次の結果がただちに得られる。(この結果は、定理1の一部である。)

<u>系5.</u> $\mathcal{L}(G)$が分配束であるための必要十分条件はGがforestであることである。

さらにまた、モジュラー対の対称性について考えてみたところ、次の結果が得られた。

定理6. A，B∈$\mathcal{L}(G)$に対して，（A，B）がモジュラー対ならば，（B，A）もモジュラー対である。

束$\mathcal{L}$の任意の2要素A，Bに対して「（A，B）がモジュラー対ならば，（B，A）もモジュラー対」が成立するとき束$\mathcal{L}$は，semi modularであるので，次の結果が得られる。

系7. $\mathcal{L}(G)$は，semi modularである。

〔5〕においてG.－C. Rotaは，Bond latticeがexchange propertyをもつことを示した。このことによっても系7は得られる。

Boole束が相補的でかつ分配的な束であることから，定理1より次の結果が得られる。

系8. $\mathcal{L}(G)$は，相補的である。

References

[1] C.Berge, Graphs and Hypergraphs (North-Holland, Amsterdam, 1973).

[2] G.Birkhoff, Lattice Theory (A.M.S. Colloq. Publ., Providence, 1967).

[3] F. Maeda and S. Maeda, Theory of symmetric lattices (Springer-Verlag, Berlin, 1970).

[4] S. Maeda, private communication, the 3rd lattice theory symposium (in Tokai University, 1984).

[5] G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions, Z. Wahrsch., 2 (1964) 340-368.

[6] M. Tsuchiya, On determination of a graph G whose bond lattice $\mathcal{L}$(G) is modular, to appear in Discrete Math..

[7] M. Tsuchiya, On modular pairs of the bond lattice of a graph, to appear.

[8] D.J.A.Welsh, Matroid Theory (Academic Press, London, 1976).